Magnétostatique dans le vide

Les champs magnétiques lorsque les sources de ces champs sont connues il existe deux sources possible pour les champs magnétiques : d'une part les courants électriques, d'autre part la matière (em) aimants, dans cette partie, on l'étudiera les propriétés des champs, inductions et potentiel magnétique crée par différentes distributions de courant.

I. Description du Courant électrique - Rappel:

1. Courant électrique.

C'est le mouvement d'ensemble des champs électrostatiques, dans un conducteur, on distingue deux types de porteurs de charges : les porteurs de charges fixes et porteurs de charges mobiles

Exemple: Métal (Cuivre) on trouve:

fixes ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ $\bar{e}$ $\vec{v}$ mobiles.

Les ions sont fixes de densité ρ_f. les électrons sont mobiles de densité ρ_m, la densité totale de charge est $\rho = \rho_m + \rho_f$.

ρ : la densité de charge contenue dans l'unité de volume

$$\rho = \frac{dQ}{d\tau}$$ dQ étant la charge contenue dans $d\tau$.

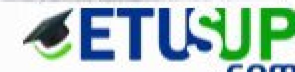
Soit n le nombre d'électrons par unité de volume :

$$\rho_m = n(-e) = -ne \quad \text{avec} \quad e = 1,6 \times 10^{-19}\,C$$

2. Densité de courant - Intensité du Courant

Soit un conducteur électrique parcouru par un courant, l'intensité du courant I est défini par $I = \frac{dQ}{dt}$

dQ étant la charge totale traversant la surface S pendant dt



$$dQ = \rho \cdot d\tau$$
$$= \rho \cdot \vec{ds} \cdot \vec{dl}$$
$$= \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{ds} \cdot dt.$$

Par conséquent :

$$dI = \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{ds}.$$

(C) ; ds ; (S) ; $\vec{e}$; $\vec{v}$

ds : une surface élémentaire de S

dl : déplacement des porteurs de charges pendant dt

$\vec{v}$: vitesse des porteurs de charges traversant ds

dI : le courant traversant ds.

La densité de courant est : $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$ d'où : $dI = \vec{J} \cdot \vec{ds}$

Par conséquent l'intensité

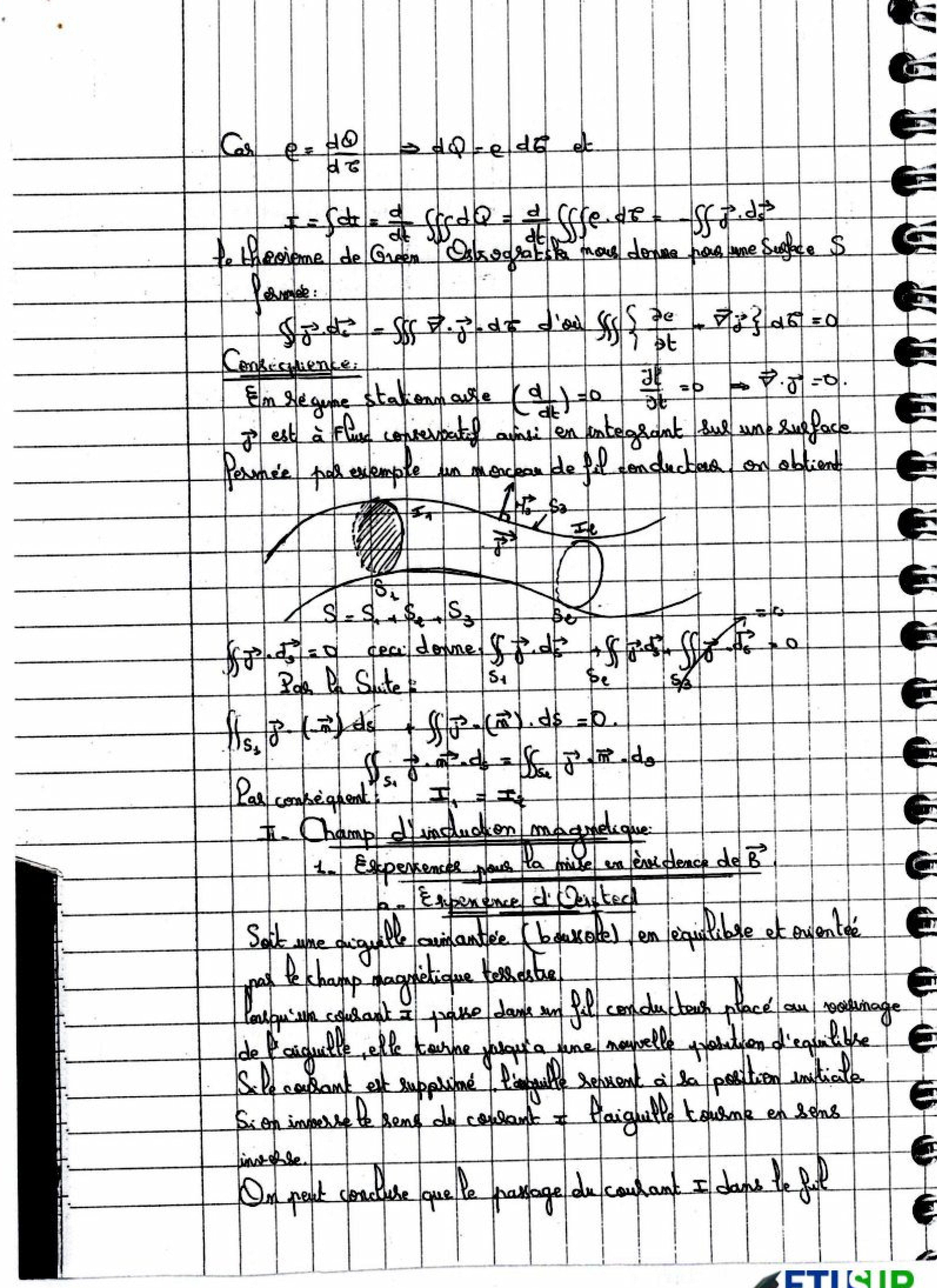
3- Équation de la conservation de la charge

La conservation de la charge électrique est un principe physique qui exprime l'invariance de la charge électrique d'un système isolé. La charge électrique ne peut être qu'échangée avec un autre système.
On dit qu'il s'agit d'une grandeur conservative. Ce principe de conservation de la charge est également à la base de la loi des nœuds en électrocinétique.
Si $\vec{J}$ désigne le vecteur densité volumique du courant et ρ la densité volumique de charge, l'équation de conservation de la charge s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

En effet, on considère un volume V délimité par une surface fermée S. La conservation de la charge implique que la variation de la charge électrique contenue dans V est égale à l'opposé du flux de la charge qui traverse la surface fermée S, cela s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho \cdot d\tau = -\oint_S \vec{J} \cdot \vec{ds}$$



Car $\rho = \frac{dQ}{d\tau} \Rightarrow dQ = \rho \, d\tau$ et

$$I = \int dI = \frac{d}{dt} \iiint dQ = \frac{d}{dt} \iiint \rho \cdot d\tau = - \iint \vec{J} \cdot \vec{ds}$$

le théorème de Green Ostrogratski nous donne pour une surface S fermée :

$$\iint \vec{J} \cdot \vec{ds} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \cdot d\tau \quad \text{d'où} \quad \iiint \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right\} d\tau = 0$$

Conséquence :

En régime stationnaire $\left(\frac{d}{dt}\right) = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

$\vec{J}$ est à flux conservatif ainsi en intégrant sur une surface fermée par exemple un morceau de fil conducteur on obtient

$$\iint \vec{J} \cdot \vec{ds} = 0 \quad \text{ceci donne} \quad \iint_{S_1} \vec{J} \cdot \vec{ds} + \iint_{S_2} \vec{J} \cdot \vec{ds} + \iint_{S_3} \vec{J} \cdot \vec{ds} = 0$$

(le dernier terme $= 0$)

Par la suite :

$$\iint_{S_1} \vec{J} \cdot (-\vec{n}) \, ds + \iint \vec{J} \cdot (\vec{n}) \cdot ds = 0.$$

$$\iint_{S_1} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot ds = \iint_{S_2} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

Par conséquent : $I_1 = I_2$

II. Champ d'induction magnétique :

1. Expériences pour la mise en évidence de $\vec{B}$

a. Expérience d'Oersted

Soit une aiguille aimantée (boussole) en équilibre et orientée par le champ magnétique terrestre.

Lorsqu'un courant I passe dans un fil conducteur placé au voisinage de l'aiguille, elle tourne jusqu'à une nouvelle position d'équilibre.

Si le courant est supprimé, l'aiguille revient à la position initiale.

Si on inverse le sens du courant I l'aiguille tourne en sens inverse.

On peut conclure que le passage du courant I dans le fil

modifie les propriétées de l'espace voisin du fil. cette modification est traduite par les forces qui obligent la boussole à tournée. cette experience trouve le lien entre le courant électrique et le champ magnétique

b. Experence de Rowland

Une distribution des charges

Dans le champ magnétique Une distribution des charges immobiles créen une modification de l'espace qui se traduit par un champ électrostatique $\vec{E}$, de m au voisinage des particules chargées en mouvemen on peut définir un champ d'induction magnétique noté $\vec{B}$.
$\vec{B}$ est a l'origine de la déformation de l'espace constaté par la rotation de l'équille aimentée. l'unité de $\vec{B}$ dans le système international c'est le Tesla; on trouve également dans le système CGS le Gauss (G)

$1T = 10^4 G$.

Remarques:

$B_{Terre} \simeq 0,5$ Gauss à Pôles.

le champ magnétique d'une étoile $B = 10^3 T$

un aimant donne une induction de l'ordre de 10 à 100 Gauss.

un champ magnétique d'une tâche solaire $B = 1 kG$

b. Lignes de Champ.

Définition une ligne de champ ou ligne d'induction est définie comme étant une ligne tangeante en tout ces points au vecteur B.

- Remarque:

* deux lignes de Champ ne peuvent se couper
* Dans le Cas d'un fil conducteur rectiligne les lignes de champ sont des Cercles centrées sur le fil et dont le sens dep[end] du sens du Courant.

Considérons un déplacement élementaire $d\vec{l}$ le long d'une ligne de Champ magnétique C.

Le fait que le champ magnétique B soit en tout point de C parallèle à $d\vec{l}$, alors $\vec{B} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$.

En Coordonnées Cartésiennes. $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ et les lignes de champ sont calculées en résolvant l'équation

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$$

_ En Coordonnées Cylindriques. $d\vec{l} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$

Les lignes de champ sont calculées en résolvant l'équation suivante.

$$\frac{dr}{B_r} = r.\frac{d\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z}$$

En Coordonnées sphérique.

$$d\vec{l} = dr\,\vec{e_r} + r\sin\varphi\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r\sin\varphi\,d\theta}{B_\theta} = \frac{r\,d\varphi}{B_\varphi}$$

Soit maintenant un contour : courbe fermée

On appelle tube de champ s'appuyant sur le contour, l'ensemble des lignes de champ passant par ce contour.

Tout au long de ce tube de champ, le flux magnétique est conservée.

3. Expression du champ magnétique.

a. champ d'induction magnétique crée par une seule charge en mouvement.

On considère une charge Q se déplaçant avec une vitesse V et se trouvant à l'instant t au point P. Cette charge crée au point M un champ d'induction $\vec{B}(M)$, proportionnelle à Q, à V et à $\frac{1}{r^2}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2}$$. Expression déduite de l'expérience

μ_0 : perméabilité du vide ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H.m^{-1}$).
la capacité « laisser passer »

$\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{r} \Rightarrow$ vecteur constant de la direction $\vec{PM}$.

$(\vec{B}(M), \vec{v}, \vec{u})$ forme un trièdre directe.

Les phénomènes électrique et magnétique sont reliés alors

$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$.



C étant la vitesse de la lumière.

b. Champ d'induction magnétique crée par un ensemble de charge en mouvement.

Considérons n particules de charge q_i situé en des points P_i et de vitesse v_i. En conséquence du principe de superposition, le champ magnétique crée en un point M est la somme vectoriel des champs crée par chaque particule et vaut

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \frac{\vec{v_i} \wedge \overrightarrow{P_iM}}{\|\overrightarrow{P_iM}\|^3}$$

Si le nombre de particul est très grand dans un volume V donné il est avantageux d'utiliser une description continue. il faut donc définir les distributions continue comme nous l'avons fait en électrostatique. Le passage à la limite continue consiste à assimiler tout volume élémentaire $d\tau$, situé autour d'un point B' quelconque de la distribution de charge en mouvement à une charge dq animée d'une vitesse moyenne ϑ. champ magnétique résultant s'écrit alors.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V^N dq \cdot \frac{V.P \wedge P_M}{\|P_iM\|^3}$$

4. Loi de Biot et de Savart.

+ Enoncé de la loi

$\vec{J} = nq\vec{v}$

n : nombre de charge mobile par unité de volume.

v : la vitesse de mouvement de particule

q : la charge élémentaire, rapporteur de charge

Le champ crée en M par cette ensemble des charges:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

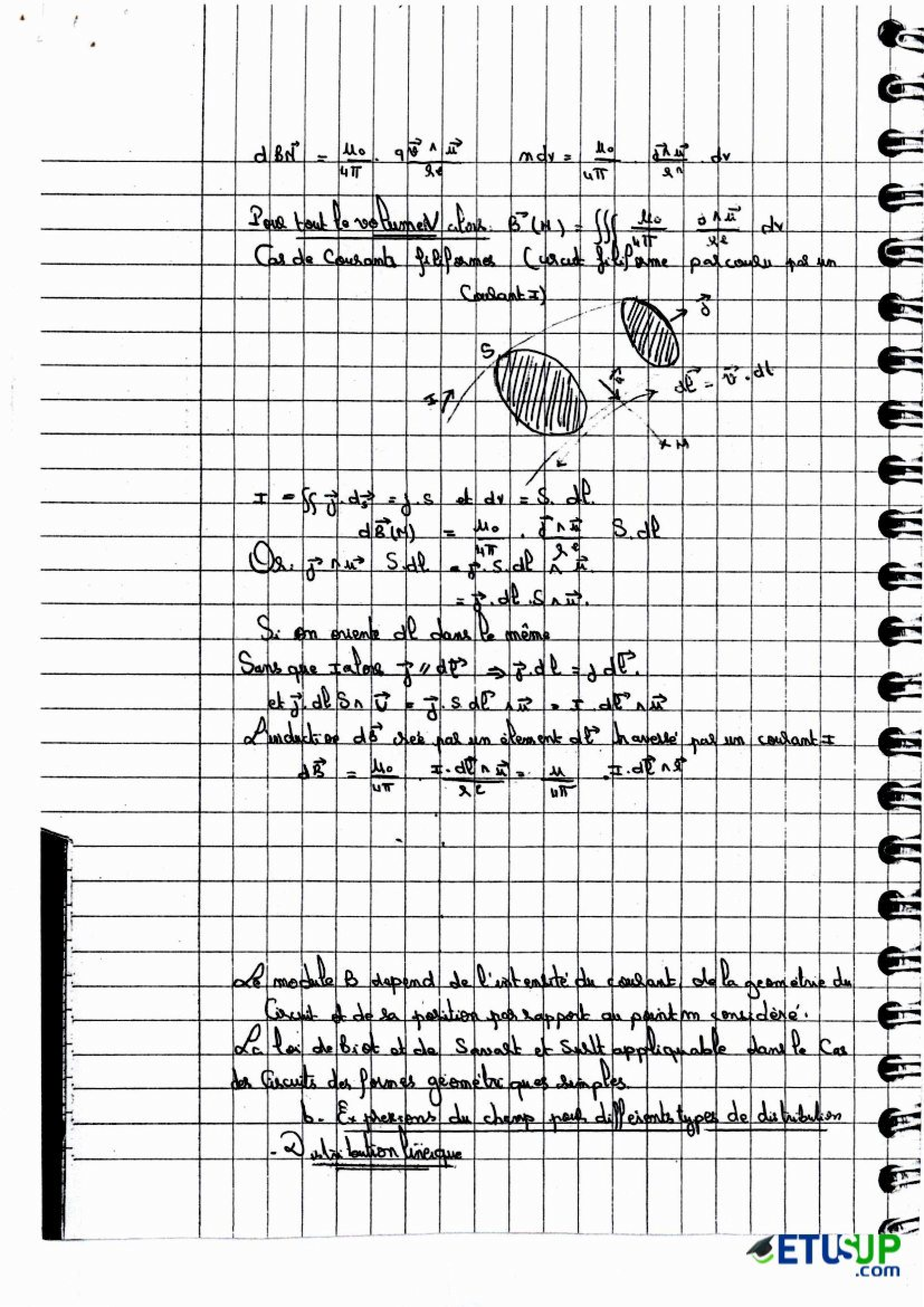
pour une charge.

Pour un nombre de porteur de charge n dv

$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2}$ $\qquad n\,dv = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}}{r^2} \cdot dv$

<u>Pour tout le volume V alors:</u> $\vec{B}(M) = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}}{r^2} dv$

Cas de Courants filiformes (circuit filiforme parcouru par un Courant I)



$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s} = j.S$ et $dv = S.dl$.

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}}{r^2} S.dl$$

Or. $\vec{j} \wedge \vec{u}\ S.dl = \vec{j}.S.dl \wedge \vec{u}$

$= \vec{j}.dl.S \wedge \vec{u}$.

Si on oriente dl dans le même

Sens que I alors $\vec{j} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \vec{j}.dl = j\,d\vec{l}$.

et $\vec{j}.dl\,S \wedge \vec{u} = \vec{j}.S\,d\vec{l} \wedge \vec{u} = I.d\vec{l} \wedge \vec{u}$

L'induction $d\vec{B}$ créé par un élément $d\vec{l}$ traversé par un courant I

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I.d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu}{4\pi} . I.d\vec{l} \wedge \vec{r}$$

Le module B dépend de l'intensité du courant, de la géométrie du Circuit et de sa position par rapport au point M considéré.

La loi de Biot et de Savart est seulement applicable dans le Cas des Circuits des formes géométriques simples.

b. Expressions du champ pour différents types de distribution

- <u>Distribution linéique</u>

Si B est crée par une distribution linéique d'après la loi de Savart.

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I.\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Par conséquent.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_M \frac{I.\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

- Distribution Surfacique.

Soit l'élément de Courant j_s la densité surfacique du courant. Si B est crée par une distribution surfacique, on remplace dans son expression $I.dl$ par $j_s d_s$ d'où le champ élémentaire crée par $j_s.d_s$ est

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{ds} \wedge \vec{PM}}{PM^3} . d_s$$

Par conséquent.

$$B(M) = \iint_S \frac{ds \wedge \vec{PM}}{PM^3} . d_s$$

- Distribution Volumique.

Soit l'élément de Courant $(j d\tau)$. Si b est crée par une distribution volumique, on remplace dans son expression $I.dl$ par $j\,d\tau$ d'où le champ élémentaire crée par $j_s.d\tau$ est: $d\vec{BM} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j} \wedge \vec{PM}}{PM^3} d\tau$.

Par conséquent. $\vec{B(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} \wedge \vec{PM}}{PM^3} . d\tau$

j: la densité volumique du courant défini en P.

$d\tau$: l'élément de volume défini en P

M est le point où le champ B est Calculé.

C. Règles pratiques pour déterminer le sens de $\vec{B}$

C.1 Règle des trois doigts de la main droite.

- Pouce I ou dl
- Index $\vec{u}$ ou $\vec{r}$
- majeur $\vec{B}$

C.2 Règle de Bonhomme d'Ampère.

Le Courant I entre par les pieds et sort par la tête. le bonhomme regarde le point M, le sens de B est celui indiqué par la main gauche

C.3 Règle de tire-Bouchon de Maxwell

On tourne le tire-bouchon dans le sens de I, le tire-bouchon s'enfonce dans le sens de B.

III. théorème d'Ampère

La loi de Biot et de Savart est utilisé facilement pour les circuits de forme simple dans le cas de circuit de forme complexe on utilise souvent le théorème d'Ampère

1. champ d'excitation magnétique $\vec{H}$.

le champ d'excitation $\vec{H}$ rend compte l'influence du milieu magnétique sur les grandeurs. Il s'exprime en Ampère par mètre

dans le vide ou dans l'air l'induction et l'excitation magnétique sont colinéaire et de même sens. $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ au sein d'un materiel magnetique il en ai de même, mais on fait intervenir la perméabilité relative du materiaux

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}.$$

2. Enoncé du théorème

- La circulation de B au long d'une courbe C quelconque orientée est fermée appelée Contour d'Ampère est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants traversant la surface délimitée par C.

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \cdot I_{inter}$$

- La circulation du vecteur H le long d'une courbe fermée C quelconque est égale à la somme algébrique du courant traversant la surface S sur le contour C

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum_j \pm I_j$$

Sera pris positivement si il est dans le sens de la normale à la surface (Règle de Tire-Bouchon par rapport au sens de parcours du contour C.)

le courant

Remarque :

Ces relations fondamental est l'equivalent pour le champ electrostatique Pour le theoreme de Gauss, ce qui compte est la somme algébrique des Sources par exemple si deux courant de même différent traversent la surface total.

b- Forme locale du théorème d'Ampère :

D'après le théorème d'Ampère on a :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{int}$$

$$= \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \, \vec{ds}$$

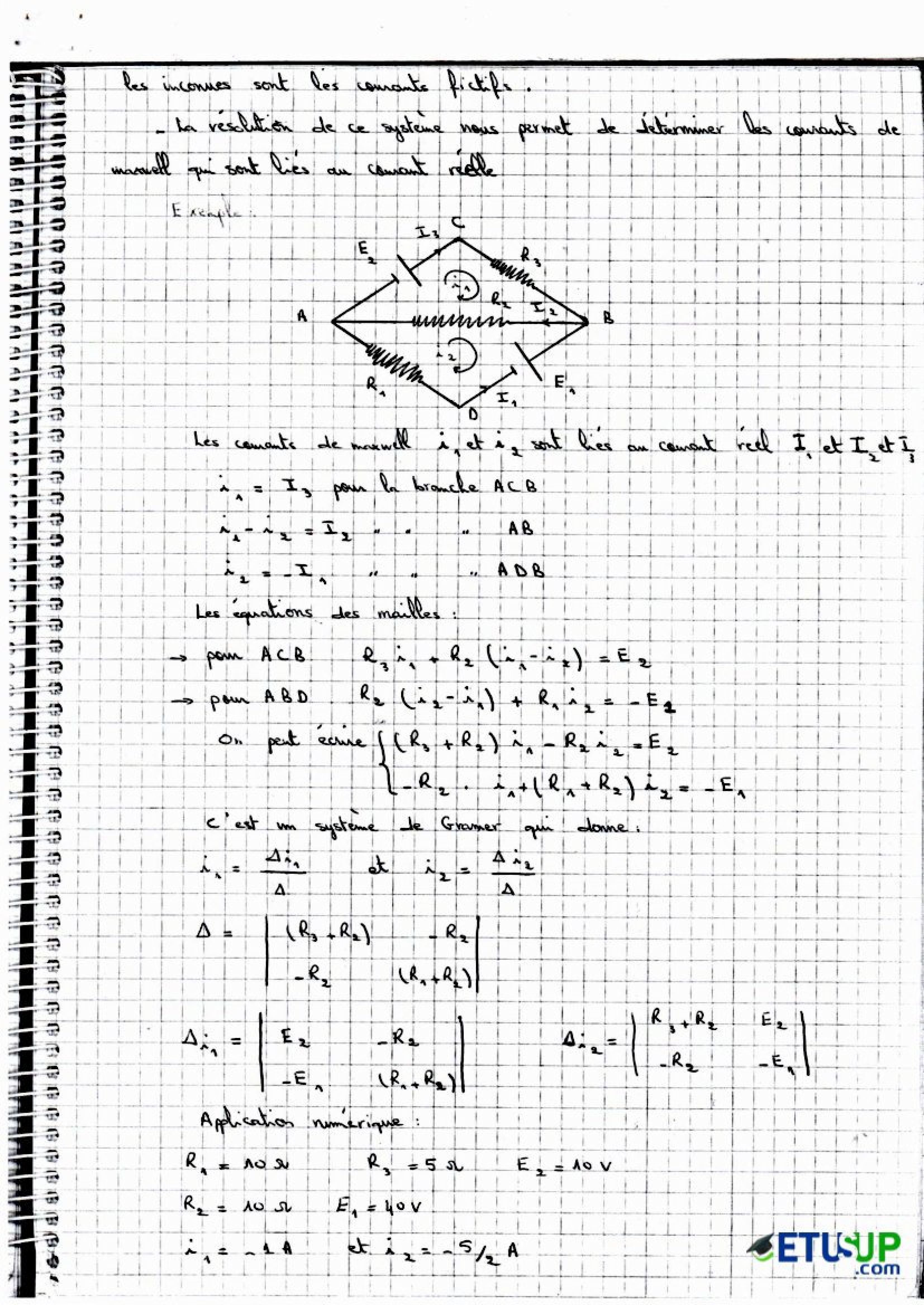
$(\mathcal{C})$ S

or $\iint_{(S)} \vec{rot}(\vec{B}) \, \vec{ds} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \, \vec{ds}$ S : surface qui s'appuie sur $(\mathcal{C})$

Ceci donne : $\iint_S (\vec{rot}(\vec{B}) - \mu_0 \vec{j}) \, \vec{ds} = 0$

par suite $\forall S \Rightarrow \boxed{\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}}$

Cette équation est appelée : forme locale du théorème d'Ampère



les inconnues sont les courants fictifs.

- La résolution de ce système nous permet de déterminer les courants de maxwell qui sont liés au courant réelle

Exemple :

Les courants de maxwell i_1 et i_2 sont liés au courant réel I_1 et I_2 et I_3

$i_1 = I_3$ pour la branche ACB

$i_1 - i_2 = I_2$ " " " AB

$i_2 = -I_1$ " " " ADB

Les équations des mailles :

→ pour ACB $R_3 i_1 + R_2 (i_1 - i_2) = E_2$

→ pour ABD $R_2 (i_2 - i_1) + R_1 i_2 = -E_2$

On peut écrire $\begin{cases} (R_3 + R_2)\, i_1 - R_2\, i_2 = E_2 \\ -R_2 \cdot i_1 + (R_1 + R_2)\, i_2 = -E_1 \end{cases}$

C'est un système de Gramer qui donne :

$$i_1 = \frac{\Delta i_1}{\Delta} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{\Delta i_2}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_3 + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & (R_1 + R_2) \end{vmatrix}$$

$$\Delta i_1 = \begin{vmatrix} E_2 & -R_2 \\ -E_1 & (R_1 + R_2) \end{vmatrix} \qquad \Delta i_2 = \begin{vmatrix} R_3 + R_2 & E_2 \\ -R_2 & -E_1 \end{vmatrix}$$

Application numérique :

$R_1 = 10\ \Omega$ $\quad R_3 = 5\ \Omega$ $\quad E_2 = 10\ V$

$R_2 = 10\ \Omega$ $\quad E_1 = 40\ V$

$i_1 = -1\ A$ et $i_2 = -5/2\ A$

2 - Théorème de Millman : Cette méthode est une forme particulière de la lois des noeuds exprimé en terme de potentiel.

---

c - choix de la courbe fermée d'Ampère :

le calcul de $\oint_{courbe} \vec{B}.\vec{dl}$ doit être facile c'est pourquoi on doit choisir la courbe ($\mathcal{C}$) de façon à ce que $\vec{B}$ soit tangente ou perpendiculaire à ($\mathcal{C}$), d'autre part le module de $\vec{B}$ doit être constant le long de ($\mathcal{C}$) ou null sur certaine partie de ($\mathcal{C}$)

3 - Mise en oeuvre du théorème d'Ampère :

Pour calculer $\oint_{courbe} \vec{B}.\vec{dl}$ il faut connaître d'avence le champ $\vec{B}$ par les régles de symétrie et d'invariance. cette propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul de champ magnétique. Du fate que ce champ soit un effet créer par un courant, il contient les informations sur les causes qui lui ont donnés les sens, ceci ce traduit par la présence des certaines symétrie et d'invariance si les sources de courant en possèdent également, ainsi si l'on connait les propriétés de symétrie de la densité du courant on pourra connaître celle du champ magnétique

a - Vecteurs et pseudo-vecteurs.

Un vecteur polaire ou Vraie vecteur est un vecteur dont la direction, le module et le sens sont parfaitement déterminés.

Ex : vitesse d'une particule, champ électrostatique, densité du courant.

Un vecteur axial ou pseudo-Vecteur est un vecteur dont le sens est définit à partir d'une convention d'orientation d'espace est dépend donc de cette convention

Ex : Champ magnétique, la normale à la surface

Cette différence provient du produit vectoriel : le sens du produit vectoriel dépend de la convention d'orientation de l'espace. le produit vectoriel de deux vecteur (respectivement pseudo-vecteur) est un pseudo vecteur (respectivement Vraie-vecteur) tandis que celui d'un vraie vecteur par un pseudo vecteur est un pseudo vecteur. Orienté l'espace provient à déterminer le sens par la règle

de tire-bouchon ou celle du bonhomme d'Ampère.

b - Règles de symétrie :

Plan de symétrie (P) : si (S) admet un plan de symétrie (P), un effet à caractère vectorielle est contenu dans le plan alors que un effet à caractère pseudo vectoriel est perpendiculaire.

Plan d'Antisymétrie (P') : si par symétrie à un plan (P') (S) est transformé en moins (S) en tout point de ce plan. Un effet est caractère vectoriel est perpendiculaire au plan, alors qu'un effet à caractère pseudo vectoriel est contenu dans ce plan.

c - Règles d'invariance :

Invariance par translation : si (S) est invariant par translation parallèle à un axe (oz par exemple) les effets ne ~~dépent~~ dépendent pas de z.

Symétrie axiale : si (S) est invariant par toute rotation autour d'un axe alors les effets ne dépendent pas de l'angle de rotation.

Symétrie cylindrique : Si (S) est invariant par translation le long de l'axe (oz) et rotation autour de ce même axe, alors ces effets exprimées en coordonnés cylindriques ne dépendent que de rayon.

Symétrie sphérique : Si (S) est invariant dans tout rotation autour d'un point fixe O, alors ces effet exprimées en coordonnées sphérique ne dépendent que de rayon r.

d - Conséquences des règles d'invariance et de plans de symétrie :

Les vecteurs et pseudo-vecteurs se transforme de la même manière dans une rotation ou translation. Il n'ont n'est pas de même dans la symétrie par rapport à un plan. dans cette transformation :

→ Un vecteur est transformée en sons symétrique

→ Un pseudo-Vecteur et transformé en l'opposé de symétrique.



Transformation d'un vecteur par symétrie par rapport à un plan

Transformation d'un pseudo vecteur par symétrie par rapport à un plan.

Comme le champ $\vec{B}$ est un pseudo vecteur alors :

→ Si (P) est un plan de symétrie d'une distribution $\vec{J}$ alors (P) est un plan d'Antisymétrie pour $\vec{B}$

→ si (Q) est un plan d'Antisymétrie de distribution $\vec{J}$ alors (Q) est un plan de symétrie pour $\vec{B}$

→ si $\vec{j}$ est invariant par rotation autour d'un axe $\vec{B}$ l'est aussi

→ si $\vec{j}$ est poloïdal (portée par $\vec{e_r}$ et/ou $\vec{e_z}$) alors $\vec{B}$ est toroïdal (portée par $\vec{e_\theta}$)

→ si $\vec{j}$ est toroïdal alors $\vec{B}$ est poloïdal.

→ Si le système de courant possède un plan de symétrie alors $\vec{j}$ est contenu dans ce plan alors que $\vec{B}$ est perpendiculaire.

IV – Le potentiel vecteur :

1 – Conservation du flux de $\vec{B}$:

Considérons une surface fermé (V) fermé et orienté, c-à-d pour S, laquelle on peut définir localement un élément de surface $\vec{ds} = ds.\vec{n}$ dont le vecteur normal est orienté vers l'extérieur (par convention)

surface fermé vaut :

Le flux du champ magnétique à travers cette $\Phi = \oiint_S \vec{B}.\vec{ds} = 0$

Ce flux est exprimé en Weber (wb), ceci explique que ce qui entre d'un côté ressort de l'autre côté. or $\Phi = \oiint_S \vec{B}.\vec{ds} = \iiint_V \text{div}\,\vec{B}\, d\tau = 0 \Rightarrow \text{div}\,\vec{B} = 0$

V : le volume limité par la surface S

La conservation du flux magnétique est une propriété très importante et montre une différence fondamental entre le champ magnétique et le champ électrostatique. nous avons vu avec le théorème de Gauss que le flux du champ électrostatique dépend des charges électriques contenus à l'intérieur de la surface.

$$\oiint_S \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

2 - Potentiel vecteur $\vec{A}$:

Nous avons vu en électrostatique que le champ dérive d'un potentiel V tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$. Un tel potentiel scalaire n'existe pas en magnétostatique il existe par contre un champ de vecteur $\vec{A}$ à partir du quel le champ magnétique peut être déduit par la relation $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$

En effet : on sait que $\text{div}\,\vec{B} = 0$ et que $\text{div}(\overrightarrow{rot}) = 0$ Alors il existe un champ $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$

$\vec{A}$: est appelé potentiel vecteur

$\vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)$ est également un potentiel vecteur

car : $\overrightarrow{rot}(\vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) + \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f)) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{B}$

avec $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}) = 0$

on dit que $\vec{A}$ est défini à un grad près

3 - Equation de Poisson en $\vec{A}$:

$\vec{A}$ n'est pas unique

Pour fixé le choix de ce vecteur on impose une contrainte supplémentaire sur $\vec{A}$ appelé Jauge de coulomb : $\text{div}\,\vec{B} = 0$

on a donc comme equations :

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} \\ div(\vec{A}) = 0 \quad \text{car } div(\vec{rot}) = 0 \\ \vec{rot}(B) = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

La dernière équation constitue la forme locale du théorème d'Ampère, ce système d'équation donne le résultat suivant :

$$\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{A})) = \vec{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}$$

d'où : $\Delta\vec{A} + \mu_0\vec{j} = 0$ c'est l'équation de Poisson

4 - Expression du potentiel Vecteur $\vec{A}$:

Par analogie avec l'éléctrostatique, la résolution de l'équation de poisson en magnétostatique permet de déterminer l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}$ qui est : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}\,d\tau}{PM}$ pour une distribution volumique

$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{\vec{j}_s\,ds}{PM}$ pour une distribution surfacique

$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}\,dl}{PM}$ pour une distribution linéique

5 - Propriétés de symétrie et d'invariance pour $\vec{A}$:

$\vec{A}$ est un vraie vecteur alors que $\vec{B}$ est un pseudo vecteur par conséquent :
- $\vec{A}$ est symétrique par rapport à un plan de symétrie.
- $\vec{A}$ est antisymétrique par rapport à un plan d'Antisymétrie

Les regles d'invariance de $\vec{A}$ sont les même que celle de $\vec{B}$

V - Récapitulation :

1 - Résumé : En résumé, le champ magnétostatique peut être calculer selon 3 façons différentes :

→ loi de Biot et le savart : Elle n'est pratique que lorsqu'on sait faire l'addition des champs $d\vec{B}$ crée par un petit élement du circuit (souvent des circuits filiformes)

→ la conservation du flux : à n'utiliser que si l'on connait déjà son expression dans une autre région de l'espace

→ . le Théorème d'Ampère : Il faut être capable de calculer la circulation du champ sur un contour choisit . cela nesésite une symetrie relativement simple des courants

2 - Exemple de calcul du champ magnétique .

a - Conservation du flux :

Soit une distribution surfacique de courant $\vec{J_s}$ séparant l'espace en deux régions 1 et 2 comme le montre la figure ci-dessous :

$d\vec{s}_2$ $\vec{J_s}$ S_2 n_{12} region 2 region 1 S_1 $d\vec{s}_1$

Considérons une surface fermé fictive traversant la nape de courant .
la conservation du flux magnétique à travers cette surface s'écrit :

$$\iint_{S_1} \vec{B}.\vec{ds} + \iint_{S_2} \vec{B}.\vec{ds} + \iint_{S_L} \vec{B}\,\vec{ds} = 0$$

où S_L de la surface latéral : lorsqu'on fait tendre cette surface vers 0 (S_1 tend vers S_2) on obtient : $\iint_{S_1} \vec{B}.\vec{ds} + \iint_{S_2} \vec{B}.\vec{ds} = 0$

$$\Rightarrow \iint_{S_1=S_2} (\vec{B}_2-\vec{B}_1)\,\vec{n}_{12}\,ds = 0$$

Puisque $\vec{ds}_2 = -\vec{ds}_1 = \vec{n}_{12}\,ds$. ce résultat montre que :

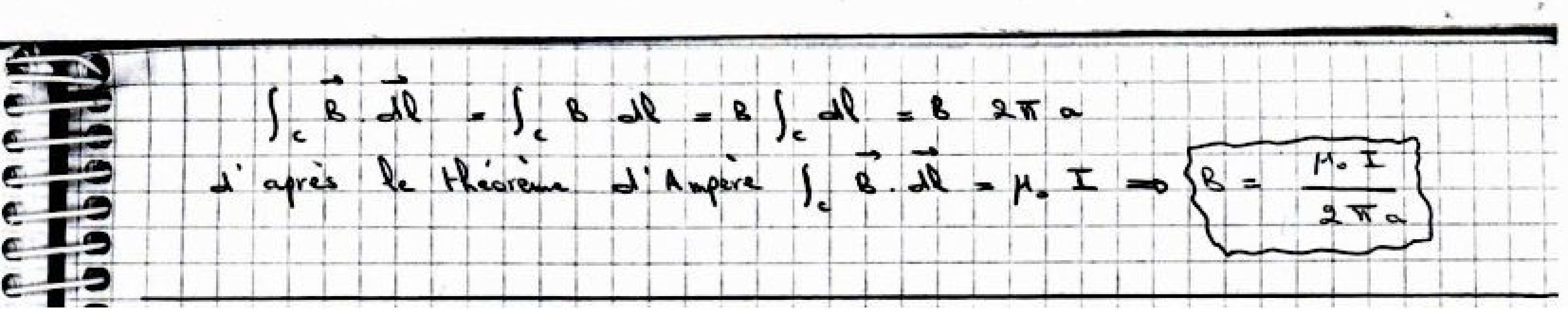
$(\vec{B}_2-\vec{B}_1)\,\vec{n}_{12} = 0$

b - Théorème d'Ampère :

On va calculer le champ magnétique d'un fil infini par application du théorème d'Ampère

I $\otimes \vec{B}$ H M a C

La courbe d'Ampère est une ligne de champ : cercle (C) de rayon a . $\vec{B}$ est constante sur le cercle .



$$\int_c \vec{B} \cdot \vec{dl} = \int_c B \, dl = B \int_c dl = B \, 2\pi a$$

d'après le théorème d'Ampère $\int_c \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$




ETUSUP.com